# Histoire de l'invention des géométries non-euclidiennes
# et de ses conséquences épistémologiques.

## Antiquité

**Proclus** (410-485) fait état de discussions au sujet du 5ème postulat d'Euclide, et d'essais de démonstration, notamment celle de Posidonius (135-51) qui substitue à la définition euclidienne des parallèles (droites sans point commun) une définition par l'équidistance (en tout point). Proclus invoque le cas des lignes qui ne se rencontrent jamais, mais ne sont pas des parallèles (droites asymptotes à une hyperbole).

## Moyen Âge

**Des arabes musulmans** (an-Nayrizi, Tabit-n'Qurra, al-Hayyam, Nasir ad-Di, ad-Tusi…) sont les seuls à tenter une solution du problème, soit en démontrant le postulat, soit en y substituant un autre « plus clair et plus évident ». Le problème n'est pas résolu, mais a été l'occasion de développements mathématiques importants.

## Temps modernes

**Wallis** (1616-1703), en Angleterre, voit dans le postulat un cas particulier des relations entre figures semblables. Il inscrit dans les notions communes la proposition : *Pour toute figure, il existe des figures semblables de grandeur relative arbitraire*. Le postulat peut être démontré si l'on admet l'existence d'un triangle semblable à un triangle donné.

**Saccheri** (1667-1733), en Italie, dans son ***Euclides ab omni naevo vindicatus*** (Euclide disculpé de toute souillure - 1733), tente de montrer que le rejet du 5ème postulat entraîne une contradiction. Il démontre que dans un quadrilatère isocèle birectangle, les autres angles ne peuvent être supérieurs à un droit. Si ces angles sont droits, on est dans le cas de la géométrie euclidienne. Mais Saccheri envisage et développe l'hypothèse que ces angles soient aigus, qu'il rejette du fait d'une erreur de construction.

**Lambert** (1728-1777), en Suisse, dans sa ***Theorie der Parallelinien*** (1766), recourt à la même voie que Saccheri, en prenant pour point de départ un quadrilatère trirectangle, et en s'interrogeant sur la valeur du quatrième angle. Trois possibilités se présentent : l'hypothèse de l'angle droit, qui correspond au postulat d'Euclide ; l'hypothèse de l'angle obtus, qu'il rejette ; l'hypothèse de l'angle aigu, qu'il développe sans commettre la même erreur que Saccheri, mais en déclarant ne trouver aucune contradiction qui attesterait la vérité du 5ème postulat. Il se dit même « enclin à penser que la troisième hypothèse est valable sur quelque sphère imaginaire. Il doit y avoir tout de même une raison pour laquelle il est difficile de la réfuter dans le plan, contrairement à ce qu'on peut aisément faire dans le cas de la deuxième hypothèse ». Il conclut : « Les démonstrations du postulat d'Euclide peuvent être menées si loin qu'il ne restera plus qu'un obstacle en apparence insignifiant. Mais une analyse minutieuse montre que tout le problème gît dans cette vétille : généralement elle contient la proposition à démontrer, ou un postulat équivalent ».

**Legendre** (1752-1834), en France, dans ses ***Éléments de géométrie***, démontre : 1/ que dans un triangle la somme des angles ne peut surpasser deux droits ; 2/ que, si pour un seul triangle la somme des angles égale deux droits, il en est de même pour tous les triangles.

Époque contemporaine

**Lobatchevski** (1792-1856), en Russie, publie des ***Fondements de la géométrie***, une ***Théorie des parallèles***, ***La géométrie imaginaire***, et une ***Pangéométrie***, qui lui valent le surnom de « Copernic de la géométrie ». Dans la deuxième de ces œuvres, il remplace le 5$^{\text{ème}}$ postulat par : « Toutes les droites tracées dans un même plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, à savoir en droites qui coupent la droite donnée et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite de ces deux classes est dite parallèle à la droite donnée ». Autrement dit : un point pris hors d'une droite peut appartenir à plusieurs droites non-sécantes à celle-ci. Lobatchevski ne cherche aucune confirmation de sa géométrie dans la réalité physique, accomplissant ainsi le geste fondateur attribué par Eudème à Pythagore. Ses éditeurs commentent : « La théorie de Lobatchevski était incompréhensible à ses contemporains, car elle semblait, telle qu'elle était, contredire un axiome dont la nécessité est basée uniquement sur un préjugé consacré depuis des milliers d'années ».

**Gauss** (1777-1855), en Allemagne, surnommé « le prince des mathématiciens », écrit à son ami Schumacher le 28 novembre 1848 : « J'ai eu dernièrement l'occasion de relire l'opuscule de Lobatchevski intitulé ***Les nouveaux principes de géométrie avec une théorie des parallèles***. Cet opuscule contient les éléments de la géométrie qui devrait exister, et dont le développement formerait un enchaînement rigoureux, si la géométrie *euclidienne* n'était pas vraie. Un certain Scheikardt a donné à cette géométrie le nom de *géométrie astrale*, Lobatchevski celui de *géométrie imaginaire*. Vous savez que depuis cinquante-quatre ans je partage les mêmes convictions, sans parler ici de certains développements qu'ont reçus, depuis, mes idées sur ce sujet. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatchevski aucun fait nouveau pour moi, mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique. Je crois devoir appeler votre attention sur ce livre, dont la lecture ne peut manquer de vous causer le plus vif plaisir ».

**Bolyaï** (1775-1856), en Hongrie, construit une « géométrie absolue », équivalente à celle de Lobatchevski, indépendamment des travaux de ce dernier et de ceux de Gauss. Bel exemple d'avancées scientifiques concomitantes sans communication entre ceux qui les ont produites !

**Riemann** (1826-1866), en Allemagne, adopte l'hypothèse de l'angle obtus, et doit admettre par suite qu'une droite a une longueur finie. Il construit une nouvelle géométrie non-euclidienne, avec pour axiome : *Par un point extérieur à une droite on ne peut mener des parallèles à cette droite*. Autrement dit : deux droites ont toujours au moins un point commun.

**Beltrami** (1835-1900), en Italie, trouve un « modèle » euclidien de la géométrie de Lobatchevski en identifiant à des droites les lignes dites *géodésiques* que l'on peut tracer sur une sphère (telle une mappemonde avec ses méridiens et ses parallèles). Il s'ensuit que la géométrie de Lobatchevski est non-contradictoire dans la mesure où la géométrie euclidienne est non-contradictoire.

**Poincaré** (1854-1912), en France, donne deux modèles de la géométrie de Lobatchevski, et montre qu'à tout théorème de cette dernière correspond un théorème euclidien, et réciproquement. Il s'ensuit que la géométrie euclidienne est non-contradictoire si celle de Lobatchevski est non-contradictoire.

**Hilbert** (1862-1943), en Allemagne, dans ses ***Fondements de la géométrie*** (1899), cherche à démontrer la « consistance », c'est-à-dire le caractère non-contradictoire de la géométrie. Il aboutit à une preuve de consistance relative – *hypothétique* – de la géométrie euclidienne : elle est consistante si l'arithmétique est consistante.

**Gödel** (1906-1978), en Tchécoslovaquie, en Autriche, et aux USA, démontre en 1930 et 1931, à partir de l'arithmétique, qu'on ne peut produire aucune démonstration de consistance pour un « système formel » plus « fort » (c'est-à-dire comportant plus d'axiomes) que la logique élémentaire – soit la syllogistique aristotélicienne modernisée sous la forme du *calcul des propositions* et du *calcul des prédicats* dits *du premier ordre*. C'est l'échec du « programme de Hilbert », et la preuve d'une incertitude mathématiquement fondée quant au caractère non-contradictoire des mathématiques.